SÉRIES

Séries à termes positifs

Exercice 1. Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$
2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$
3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n}$
4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$
5) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$
6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
7) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$
8) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2-\ln n}$
9) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2(\ln n)^3}$
10) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)!}$
11) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$
12) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$

Exercice 2. Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2^n}{3^{n-2}}$
2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+2n}$
3) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$
4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$

Exercice 3. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction strictement croissante. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 4. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Monter que si $\sum u_n$ converge, alors il en va de même des séries $\sum u_n^2$, $\quad \sum \ln(1+u_n) \quad$ et $\quad \sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$.

Exercice 5. Par une comparaison série-intégrale, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ est divergente.

Exercice 6 ($\star$)**.** Étudier, selon la valeur de $p \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}$.

Séries à termes quelconques

Exercice 7. Déterminer la nature des séries de terme général suivants :

1) $\dfrac{\sin n}{n^2+1}$
2) $(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$
3) $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$
4) $\cos(n\pi)$
5) $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$
6) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$
7) $\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$
8) $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 8. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{8^n}{(2n)!}$ est un réel négatif.

Exercice 9.

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2) Montrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
3) Démontrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
4) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge. Est-ce qu'il y a une contradiction avec le résultat de la question 2 ?

Exercice 10 (Formule de Stirling)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \frac{n!e^n}{n^n}$ et $w_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
2) En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \ln w_{n+1} - \ln w_n$.
3) En déduire que
$$\exists M > 0 \qquad n! \sim M\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Par le calcul intégral (intégrales de Wallis), on peut démontrer que $M = \sqrt{2\pi}$, et donc
$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$